Hermann Knoll:

Die diskursive Methode

Eine Methode zur strukturierten Lösung von mathematischen, naturwissenschaftlichen und technischen Problemen

Inhalt

1. Einleitung

Warum soll man lernen, Probleme zu lösen? Ja, warum soll man dies lernen?. Warum soll man Probleme überhaupt lösen? Gibt es nicht viele sogenannte Probleme, mit denen wir auch sehr gut leben können, wenn sie nicht gelöst würden? Aber da sind dann doch die dringend zu lösenden Probleme, welche unser Leben, die Gesundheit, die Natur bedrohen. Es gibt die Probleme, die im Zusammenhang mit der beruflichen Erwerbstätigkeit auftreten, und dann noch die privaten.

In den meisten Fällen muss kein spezieller Lernprozess arrangiert werden, weil das Lernen auf Grund der dringenden Notwendigkeit der Lösung angezeigt ist. Viele Lernprozesse ergeben sich automatisch in der jeweiligen Situation. Oft ist es aber nötig, sich Methoden anzueignen, damit die Lösung effizienter und schneller gefunden wird. Vielfach ist eine Lösung ohne sorgfältige Aufbereitung der Fragestellungen gar nicht zu finden, weil der Komplexitätsgrad zu gross ist. Und in einem solchen Fall sollte der ganze Prozess auch dokumentiert werden, damit die Lösung nachvollziehbar wird.

Der vorliegende Text möchte einen Weg für das Lösen formalisierbarer Probleme speziell aus der naturwissenschaftlich-technischen Praxis aufzeigen. Bei solchen Fragestellungen werden häufig mathematische Methoden eingesetzt. Meist ist es aber ein weiter und schwieriger Weg, das Problem zu mathematisieren, auch wenn bereits mathematische Modelle vorhanden sind. Es gibt noch viel zu tun, um die Problemstellung so aufzubereiten, dass die Modelle eingesetzt werden können, und Missverständnisse und Ungenauigkeiten erschweren den Lösungsprozess. Hier will die diskursive Methode einsetzen. Der Diskurs ist die sprachliche Auseinandersetzung mit einem Gegenstand. Im klassischen Sinne wird er von zwei Partnern ausgetragen, welche im wechselseitigen Argumentieren den Kern des Problems heraus schälen. In der Praxis steht aber meist kein Partner für diesen Diskurs zur Verfügung. Deshalb müssen die kritischen Einwände und die Rückfragen selber eingebracht werden. Ganz besonders wichtig ist, dass dieser eigene Feedback gut und ausführlich dokumentiert wird, denn die Dokumentation muss ja das Gedächnis des Partners ersetzen. Die Dokumentation sollte es auch ermöglichen, leichter in die verschiedenen Rollen zu schlüpfen, also einmal Problemlöser zu sein und dann wieder kritischer Partner.

2. Die Methode

Dieses Kapitel liefert eine systematische Auseinandersetzung mit der Methode des diskursiven Lösens von Problemen. In sieben Schritten führt sie von der Problemstellung zur Lösung. Grosses Gewicht wird dabei auf die Auseinandersetzung mit dem Problem gelegt. Wenn nämlich hierbei die Aufschlüsselung und Strukturierung nicht gelingt, nützen die besten Methoden zur Mathematisierung und zur mathematischen Lösung nichts. Der entscheidende Erfolgsfaktor liegt beim Einstieg, der wesentlich den weiteren Weg prägt.

Ein wichtiger Punkt ist die vollständige Dokumentation des Lösungsweges. Dabei sollen nicht nur die üblicherweise schriftlich ausgeführten Teile erfasst werden, es sollen auch die Gedankengänge mit den Irrwegen und Sackgassen aufgeschrieben werden. Dabei wird auch transparent gemacht, wie man aus den Sackgassen wieder herausgekommen ist. Also, es soll wirklich der ganze Lösungsprozess aufgezeichnet werden.

Mit der breiten Verfügbarkeit von handlichen Computern und mächtigen Softwaresystemen wird die Dokumentation auch keine grossen Probleme bereiten. Textsysteme mit einfachen Formatierungsmöglichkeiten bieten sich für die strukturierte Darstellung an. Dazu kommen als Hilfe bei der Aufbereitung integrierbare Grafikprogramme und Tabellenkalkulationen. Für den mathematischen Teil der Lösung stehen Computeralgebrasysteme zur Verfügung, welche für die das Problem beschreibenden Gleichungssysteme meist eine Lösung haben. Für die Anwendung der Methode des diskursiven Lösens von Problemen ist es daher empfehlenswert, schon von Anfang an die Dokumentation auf einem tragbaren Computer zu führen. In der vorliegenden Fassung wurden die Texte mit Microsoft Word geschrieben und die Berechnungen mit Maple V durchgeführt.

2.1. Das Problem

Schul- und Übungsprobleme liegen meist in einem wohlformulierten Text vor. In der Praxis sieht es anders aus. Oft schildert der Auftraggeber die Situation in einem Gespräch oder es findet eine Besprechung mit allen am Projekt beteiligten Personen statt. Zwar werden Unterlagen übergeben, aber wichtige Bedingungen und Gegebenheiten muss man durch Nachfragen finden. Ausserdem werden mit der Auftragsvergabe häufig Lösungsvorstellungen übermittelt, die fixierend wirken können.

Wie soll man also an die Sache heran gehen? Sicher ist es wichtig, alle verfügbaren Daten zu sammeln. Dann sollte man den Wunsch der Auftraggeber so klar wie möglich formulieren und aufzeichnen. Eventuell ergeben sich bei dieser Aufzeichnung noch Fragen, die sofort geklärt werden sollten. Ein schwerwiegendes Problem besteht, wenn die Bedingungen des Auftraggebers wiedersprüchlich sind. Da hilft es nur, diese Wiedersprüche aufzuzeigen und die Forderungen einzuschränken. Ebenso wird die Lösung erschwert, wenn zu wenig Bedingungen vorhanden sind, sodass es mehrere Lösungen geben wird. In diesem Fall kann man aber die Freiheit nutzen, um mit dem Auftraggeber zusammen die Gesamtsituation zu optimieren.

Nun sollte man so weit sein wie bei einem schriftlich gestellten Problem und die konkrete Auseinandersetzung kann beginnen. Ein konkretes Problem, in einem Text ausformuliert, soll die Erläuterung der Methode des diskursiven Lösens begleiten.

- Ein zylindrischer Becher mit Radius 2 cm enthält Wasser. Bei Rotation um seine Achse steigt das Wasser am Rand 8 cm hoch und senkt sich im Innern bis auf den Boden ab. Ein Querschnitt durch die Achse ergibt eine quadratische Funktion f als Flüssigkeitsbegrenzung. Wie hoch steht das Wasser im Becher, wenn dieser in Ruhe ist?

2.2. Erste Auseinandersetzung mit dem Problem

Nach dem genauen Lesen des Textes bzw. nach der ersten gründlichen Aufnahme des Problems soll eine Strukturierung und Einordnung in vertraute Kategorien vorgenommen werden. Hier soll auch der Dialog beginnen. Dazu richtet man sich im Textsystem zwei Druckformate ein. Hier wurde das Format "ansatz" mit einem vorgestellten Punkt und der Schriftfarbe blau für den Problemlöser und das Format "feedback" mit einem vorgestellten Pfeil und der Schriftfarbe grün gewählt. Um einen kleinen Abstand beim Übergang von einem Format zu einem anderen zu erhalten, wurden noch die Formate "ansatz1" und "feedback1" eingeführt, die zur Formatierung der jeweils ersten Zeile nach dem Formatwechsel dienen.

- Problemstellung lesen, Satz für Satz
- Fragen zu den einzelnen Punkten
- Versuch, Teilprobleme zu finden

- Erste spontane Lösungsansätze notieren
- Und immer wieder die "Gegenseite" zum Zug kommen lassen.

- Ich versuche, das Problem in Teilprobleme zu zerlegen.
- Da ist einmal ein Zylinder, der mich auf die Stereometrie führt.
- Die Rotation um die Achse bringt mich auf die Zusammenhänge bei der Kreisbewegung (physikalische Grundlagen).
- Nun die quadratische Funktion, von der ich weiss, dass sie graphisch mit einer Parabel dargestellt wird.
- Ich unterscheide zwei Situationen: Becher in Ruhe und Becher in Rotationsbewegung.

➢ Sollte ich nicht noch etwas mehr über Funktionen wissen?
➢ Muss das sein, das mit der Kreisbewegung?

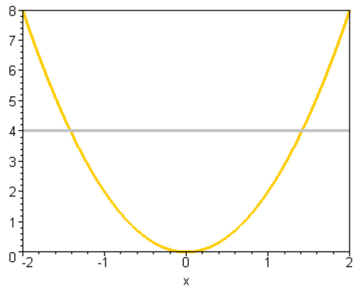
- Eine Funktion ist eine eindeutige Zuordnung.
- Ich denke schon, dass die Kreisbewegung wichtig ist. Mir bereitet die Winkelgeschwindigkeit Sorge, denn sie ist hier nicht gegeben.

➢ Aber bei der Kreisbewegung ist ja nur das momentane Schnittbild wichtig.

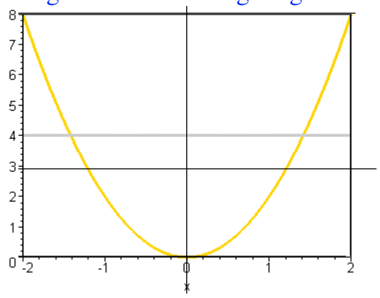
- Vielleicht schon, ich zeichne einmal die beiden Situationen.

2.3. Ausgangslage

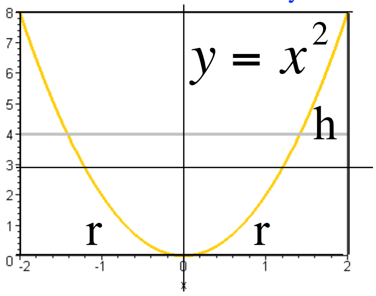
Nach einer ersten Beschäftigung mit der Fragestellung sollte nun eine systematische Aufstellung der Anfangsbedingungen gemacht werden. Dazu gehört die Zusammenstellung des vorhandenen Datenmaterials, also der gegebenen Werte. Eine graphische Darstellung ist meist hilfreich für die bessere Erfassung von verschiednen Zusammenhängen. Die Zusammenfassung der Bedingungen, welche zu Beginn vorhanden sind, soll die Übersicht über die Ausgangslage gewährleisten. Die Bedingungen werden möglichst als einfache Sätze formuliert, die dann in mathematische Formen wie Gleichungen oder Ungleichungen umgesetzt werden können. Das Datenmaterial sollte möglichst in geordneten Mengenstrukturen wie z.B. in Vektorform oder in Arrays dargestellt werden. An dieser Stelle werden auch eindeutige Bezeichnungen für die verschiedenen Grössen fesgtgelegt. Die Bezeichnungen sollten möglichst selbsterklärend, dennoch aber kurz sein. Meist wird man dabei einen Kompromiss eingehen müssen.

- Ich zeichne ein Schnittbild des Bechers in Ruhe und während der Rotation.
- 

➢ Ich denke, die horizontale Linie ist etwas hoch geraten, denn was bei der Rotation darüber steht, sollte in Ruhe in der Mitte unterhalb der Linie den Platz ausfüllen.
➢ Und die Drehachse einzeichnen wäre auch nicht schlecht.

- Also korrigiere ich die Zeichnung etwas. Ich bin mir aber bewusst, dass im jetzigen Augenblick keine absolut genaue Darstellung möglich ist.
- 

➢ Das ist schon besser. Vielleicht sollt man noch die verschiedenen Teile bezeichnen.

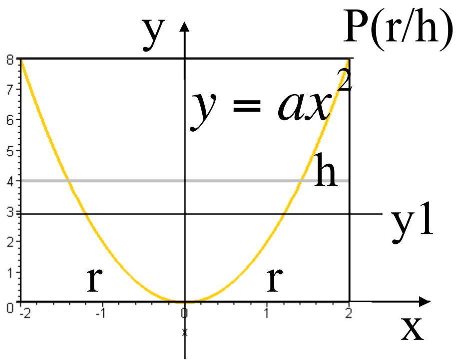
- Also Radius und Höhe des Zylinders. Und vielleicht auch die Parabel mit einer Funktionsgleichung.
- 

➢ $y = x^2$? Sicher? Sollte nicht für die Anpassung noch Spielraum bestehen?

- Wie wäre es mit $y = ax^2$? Dass der Scheitel in der Mitte unten liegt ist klar. Und die Öffnung ist nach oben, also ist das a >0. Und die Parabel geht durch einen Eckpunkt der rechteckigen Schnittfläche oben.

➢ Sollten wir nicht jetzt diesen Punkt bezeichnen.? Und auch das Koordinatensystem?

- Natürlich. Also x- und y-Achse und der Punkt P rechts oben mit P(r/h) und die Höhe der Wasserlinie in Ruhe mit y1.



2.4. Zielbedingungen

Nun ist die Situation so weit aufbereitet, dass eine Übersicht über die grundlegenden Voraussetzungen für die Bearbeitung des Problems bestehen. Das beschriebene System soll an ein Ziel geführt werden. Was also soll erreicht werden? Wir müssen jetzt die Zielbedingungen finden und formulieren, zunächst in Worten, dann aber auch mit mathematischen Ausdrucksweisen. Im Text dürfen bzw. sollen auch Erwartungen, Befürchtungen und Sorgen aufgeschrieben werden. Dies ist insofern von Vorteil, als man später auf diese Punkte zurückkommen kann.

- Der Punkt P(r/h) liegt auf der Parabel, d.h. seine Koordinaten erfüllen die Parabelgleichung.
- Das ist alles, was ich hier sehe.

➢ Was ist mit dem Zustand in Ruhe?

- Ja, die Höhe der Wasserlinie in Ruhe ist y1. Aber was soll ich damit machen?

➢ Vorhin haben wir von der Stereometrie gesprochen, der Zylinder könnte gefragt sein.

- Wenn der Becher in Ruhe ist, füllt das Wasser einen Zylinder mit der Höhe y1. Der Radius ist r.
- Ich habe jetzt zwei Aussagen.

➢ Wie heisst die 2. Aussage?

- Das Volumen des ruhenden Wasserzylinders ist gleich dem Volumen des Drehkörpers unterhalb der Parabel.

➢ Genau: unterhalb des Paraboloids.

- R und h kenne ich. Unbekannt ist das a aus der Parabelgleichung und das y1. Da gibt es also 2 Gleichungen mit 2 Variablen. Das Problem sollte also lösbar sein.

2.5. Straffung des Aussagensystems

Das unter den Zielbedingungen erhaltene Aussagensystem kann oft noch gestrafft werden. Es ist für die mathematische Behandlung von Vorteil, wenn jetzt Redundanzen erkannt und weitere Vereinfachungen gesehen werden. Sicher ist es nun vorteilhaft, alle Bedingungen in einfachen Sätzen geordnet aufzuschreiben. Die Formulierungen sollten möglichst mit Ausdrücken des Vergleichs wie "ist gleich", "ist grösser als" oder "ist kleiner als" vorgenommen werden.

- Ich habe also 2 Aussagen mit 2 Variablen. Die Aussagen sind in einfachen Sätzen formuliert. Eine weitere Reduktion ist nicht mehr möglich.

➢ Ich sehe noch ein Problem. Sollten wir nicht noch das Volumen mit V bezeichnen, damit wir besser damit rechnen können.

- Das gibt aber eine Variable mehr. Oder noch eine weitere, wenn ich für das Volumen des Wasserzylinders V_W schreibe und das Volumen unterhalb des Paraboloids auch noch bezeichne.

➢ Vielleicht gibt dies etwas viel Bezeichnungen. Für jede Variable muss man ja wieder eine Gleichung haben, das System wird unnötig aufgebläht.

- Ich schreibe V für das Wasservolumen. Das Volumen des Drehkörpers kann ich als Differenz des Bechervolumens (V_B) minus Paraboloidvolumen (V_P) berechnen. Dann habe ich die Unbekannten a, y1, V V_B und V_P, also 5 Variable.

Diese Aufbereitung der Aussagen gibt bereits eine recht gute Übersicht über das Aussagensystem. Dennoch besteht eine gewisse Unsicherheit, ob wirklich alle Elemente erfasst worden sind. Gibt es nicht hier oder da doch noch eine Beziehung, die nicht erkannt worden ist, die versteckt ist, die dann verloren zu gehen droht? Beim konventionellen Lösen von Problemen besteht diese Ungewissheit eigentlich immer. Sogar wenn man eine Lösung gefunden hat, kann man nicht sicher sein, dass wirklich alles verarbeitet worden ist.

Die hier vorgeschlagene Diskurs-Methode möchte zusammen mit der OVAL-Methode für den Ansatz und die formale Ausführung der Lösung eines Problems mehr Sicherheit bieten. Zwar besteht auch damit keine absolute Garantie, dass keine Bedingung vergessen wird, die ganzheitliche Betrachtung jedoch vermindert diese Gefahr.

2.6. Mathematisierung mit der OVAL-Methode

OVAL bedeutet "Objekte - Variable - Aussagen - Lösung". Am Anfang stehen also Objekte. Was sollen aber hier Objekte sein? Die Methode orientiert sich an der objektorientierten Programmierung, ohne sich formal strikte in dieses Konzept einbinden zu lassen. Die Benutzer dieser Methode sollen genügend Freiheit haben, damit verschiedene Denkkonzepte unterstützt werden können.

Objekte sollen Dinge (reale oder abstrakte) sein, die eine Einheit bilden. Zu einem Objekt gehören auch seine Eigenschaften und die inneren Beziehungen. Einzelne Grössen, z.B. Variaben sollten nicht als Objekte definiert werden. Es besteht sonst die Gefahr, den Überblick über das Ganze zu verlieren. Ein Ziel ist es also, nicht zu viele Objekte zu haben. Ausserdem sollten die Objekte nach aussen geschlossen sein, sozusagen gekapselt, damit man jedes Objekt unabhängig von seiner Umgebung als eigenständiges Ganzes für sich selbst behandeln kann. Vielleicht gelingt es nicht immer, in dieser Strenge die Objekte zu definieren. Dadurch sollte man sich aber nicht abhalten lassen, mit der Methode zu arbeiten. Auch wenn die Objektdefinition nicht vollkommen ist, erreicht man eine bessere Strukturierung des Lösungsvorganges als mit einem freien Ansatz.

Wie bei jeder Methode ist auch hier Übung und Erfahrung die Grundlage für das Gelingen. Verschiedene Beispiele sollen die Möglichkeiten der Objektdefinition aufzeigen. Sind die Objekte einmal festgelegt, ist die Lösung nicht mehr weit. Variablen und Konstanten aufzulisten ist dann nicht mehr schwer. Bei der Zusammenstellung der Aussagen zu einem konsistentem System hilft die ganze Vorarbeit, die in den bisherigen Kapiteln des diskursiven Lösens geleistet worden ist. Anschliessend wird man konsequenterweise Computersysteme (z.B. ein Computeralgebraprogramm) für die Berechnung der Lösung benützen. Nicht vergessen darf die Validierung der Ergebnisse werden.

Am konkreten Beispiel wird nun die Objektdefinition vorgenommen. Nützlich ist es in diesem Zusammenhang nach bekannten Modellen hinter den möglichen Objekten zu fragen. Modelle sind allgemeine Schemata, also Schablonen, welche mit den Inhalten gefüllt werden können. Sind schon Modelle vorhanden, wird die Arbeit wesentlich erleichtert.

- Objekte:

Parabel	p	y =a*x^2
Wasserzylinder (r; y1)	Z	V = r^2*Pi*y1
Drehkörper	D	$V = V_B - V_P$

- Variable und Konstante:

r	Radius des Zylinders	reelle Zahl	2 cm
h	Höhe des Zylinders	reelle Zahl	8 cm
a	Parameter in der Parabelgleichung	reelle Zahl	> 0
y1	Höhe des Wasserzylinders	reelle Zahl	0 < y1 < 8 cm
V	Volumen des Wassers	reelle Zahl	> 0
V_B	Volumen des Bechers	reelle Zahl	> 0
V_P	Volumen des Paraboloids	reelle Zahl	> 0

- Aussagen:

Der Punkt P liegt auf der Parabel.	h = a*r^2
Der Wasserzylinder hat das Volumen V	V = r^2*Pi*y1
Das Paraboloid hat das Volumen V_P	V_P = Pi*int(x_P*dy,y=0..h)
Das Volumen des Bechers ist V_B	V_B = r^2*Pi*h
Das Wasservolumen V unter dem Paraboloid ist gleich der Differenz von Becher und Paraboloid	$V = V_B - V_P$

- Lösung:
  Mit Maple:

```
> restart:
> # Konstante:
> r:=2;
> h:=8;
> # Parabel:
> f:=x->a*x^2;
> # Variable: {a,y1,V,VP,VB}
> xinv:=y->solve(y=f(x),x);
> umkehr:=[xinv(y)];
> umkehrfkt:=unapply(umkehr[1],y);

                                  1/2          1/2
                              (a y)        (a y)
                    umkehr := [--------, - --------]
                                 a            a

                                            1/2
                                       (a y)
                      umkehrfkt := y -> --------
                                           a
> # Aussagen:
> # Der Punkt P liegt auf der Parabel.
> G1:=h=a*r^2;
> # Der Wasserzylinder hat das Volumen V
> G2:=V=r^2*Pi*y1;
> # Das Paraboloid hat das Volumen VP
> G3:=VP=Pi*int(umkehrfkt(y),y=0..h);
> # Das Volumen des Bechers ist VB
> G4:= VB=r^2*Pi*h;
> # Das Wasservolumen unter dem Paraboloid ist gleich V
> G5:=V=VB-VP;
> # Lösung:
> L:=[evalf(solve({G1,G2,G3,G4,G5},{a,y1,V,VP,VB},3)];

        [{VB = 100., a = 2., y1 = 5.33, VP = 33.6, V = 66.9}]
```

2.7. Diskussion der Lösungen

Die Lösung wird auf Plausibilität überprüft.

- Also, ich habe für y1 den Wert 5.33, d.h. 5.33 cm erhalten. Der Wert liegt im vorgesehenen Bereich zwischen 0 und 8 cm.

➢ Wie genau kann das Ergebnis angegeben werden?

- Ich denke, dass man auf Millimeter noch messen kann, d.h. die Lösung ist 5.3 cm.
- Antwort: Das Wasser steht im ruhenden Becher 5.3 cm hoch.

3. Aufgaben

Die folgenden Aufgaben sind aus verschiedenen Fachbereichen ausgewählt. Sie sind so allgemein gehalten, dass Sie diese Aufgaben auch ohne besondere Fachkenntnisse bearbeiten können. Fachspezifische Hilfsangebote sind bei den Aufgabentexten angeführt.

3.1. Mathematik

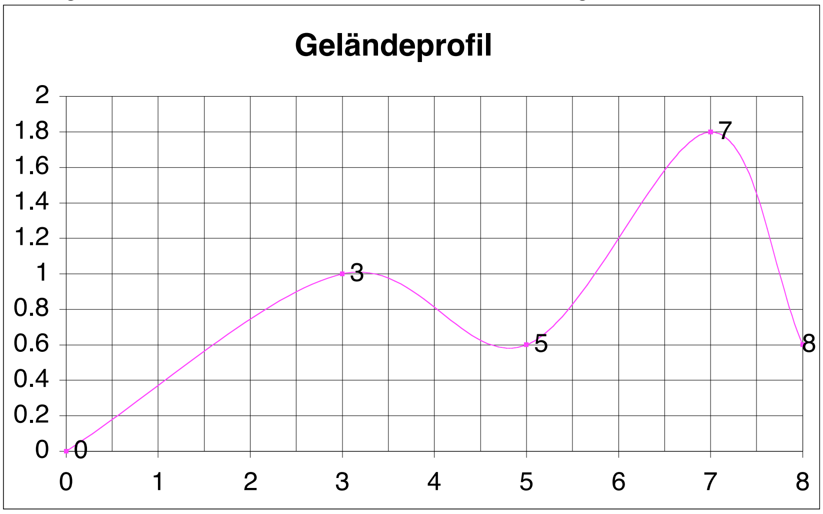
Im Diagramm wird ein Geländeprofil näherungsweise dargestellt. Vermessen wurden 5 Punkte (A..E).
Die beiden Berge sollen durch eine Seilbahn verbunden werden, die Stationen sollen dabei in der Nähe von B und von D stehen. Das Seil soll in den Stationen jeweils parallel zum Geländeprofil verlaufen.
Wo müssen die beiden Stationen gebaut werden, und welche Länge hat die Seilbahnstrecke?

Anleitung: Um mit dem Geländeprofil rechnen zu können, ist es nützlich, das Profil mit Funktionsgleichungen zu modellieren. Für den Zweck hier eignen sich am besten Parabeln (2. oder 3. Ordnung)

Vermessene Punkte

Masse in km

	x	y
A	0	0
B	3	1
C	5	0.6
D	7	1.8
E	8	0.6



3.2. Elektrotechnik

Ein Plattenkondensator besteht aus zwei parallelen, quadratischen Metallplatten (Seitnlänge a) im Abstand d voneinander. Zwischen denPlatten befindet sich als Dielektrikum Öl (rel. Dielektrizitaetszahl $\varepsilon_r = 2.5$). Nach einiger Zeit stellt man fest, dass etwas Öl ausgelaufen ist. Gemessen wurde die Kapazität des Kondensators im gefüllten Zusatnd (C0) und nachdem Öl ausgelaufen ist, und zwar in horizontaler und in vertikaler Lage (CH, CV). Wieviel Öl ist noch im Kondensator drin?

3.3. Optik

Für einen Hörsaal soll ein Overheadprojektor beschafft werden. Vorgegeben sind die Grösse der Projektionsfläche und der Abstand des Projektors von der Leinwand. Auf der Leinwand soll eine bestimmte Leuchtdichte erzielt werden. Welches Objektiv aus dem Katalog würden Sie wählen und mit welcher sollte der Projektor ausgestattet sein?

Lösungen sind zu finden unter: http://www.hknoll.ch/ue03/b34l.htm

4. Zusammenfassung

4.1. Sieben Schritte vom Problem zur Lösung

1. Das Problem
2. Erste Auseinandersetzung mit dem Problem
3. Ausgangslage
4. Zielbedingungen
5. Straffung des Aussagensystems
6. Mathematisierung mit der OVAL-Methode
7. Diskussion der Lösungen

4.2. Kernpunkt der Methode ist der Diskurs

Durch die Protokollierung auf dem Computer besteht die Möglichkeit, dass man den Standpunkt wechseln und somit zu den eigenen Ansätzen ein Feedback geben kann.

Schreiben - Zeichnen - Rechnen ..., alles auf derselben Oberfläche. Der Computer bietet dafür die geeignete Unterstützung.

4.3. Mathematisierung mit der OVAL-Methode

OVAL =

Objekte

Variable und Konstante

Aussagen

Lösung