OVAL-Methode

Elektron im elektrischen und im Magnetfeld

Ein Elektron ist ein System, welches verschiedene Atribute aufweist wie Masse, Ladung, Impuls, Drehimpuls, Bahndrehimpuls, ...). Es reagiert auf elektrische und Magnetfelder, aber auch auf andere Einflüsse. Hier soll das Elektron im elektrischen und im Magnetfeld betrachtet werden. Es ist zum Zeitpunkt t0 mit dem Impuls p0 an einem Ort r0 und ist Feldern (E(t), B(t)) ausgesetzt. Weitere Einwirkungen sollen in dieser Aufgabe hier nicht betrachtet werden. Gesucht ist die Bahn des Elektrons.

Objekte

Die Umgebung ist definiert durch ein elektrische Feld und ein Magentfeld. Aus Gründen der Einfachheit sollen die Felder hier homogen sein und den ganzen Raum durchsetzen.

```
> restart:with(LinearAlgebra):with(DEtools):
```

E(t) Elektrische Feldstärke

```
#E:=t->Vector([Ex(t),Ey(t),Ez(t)]);
E:=t->Vector([0,0,-t/10]);
```

B(t) Elektromagnetische Induktion

```
#B:=t->Vector([Bx(t),By(t),Bz(t)]);
B:=t->Vector([0,0,1]);
```

$$E := t \to \text{Vector}\left(\left[0, 0, -\frac{1}{10} t\right]\right)$$

$$B := t \to \text{Vector}([0, 0, 1])$$

Unser Objekt ist das Elektron als System mit Masse, Ladung und Impuls.

```
> #Ladung des Elektrons:
e:=1;
#e:=1.609e-19;
#Masse des Elektrons:
m:=1;
#m:=1e-31;
#Impuls des Elektrons:
p:=t->Vector([px(t),py(t),pz(t)]);
#Geschwindigkeit
v:=1/m*p;
#Beschleunigung
a:=1/m*Vector([diff(p[1],t),diff(p[2],t),diff(p[3],t)]);
#Position:
#r:=t->Vector([x(t),y(t),z(t)]);
```

$$e := 1$$

$$m := 1$$

$$p := t \rightarrow \text{Vector}([\text{px}(t), \text{py}(t), \text{pz}(t)])$$

$$v := p$$

$$a := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Die Wirkung von elektrischen und Magnetfeldern auf das Elektron wird beschrieben durch folgende Beziehungen:

```
> FE:=e*E(t);
FM:=e*Vector([v(t)[2]*B(t)[3]-v(t)[3]*B(t)[2],v(t)[3]*B(t)[1]-v(t)[1]*B(t)[3],v(t)[1]*B(t)[2]-v(t)[2]*B(t)[1]]);
```

$$FE := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{10}t \end{bmatrix}$$

$$FM := \begin{bmatrix} \text{py}(t) \\ -\text{px}(t) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Variable und Konstante

Hier werden die vorkommenden Variablen und Konstanten aufgezählt und genauer beschrieben (Bezeichnung, Beschreibung, Typ, Wertebereich oder Wert)

e   Ladung des Elektrons   rational   1.609E-19 C

```
e;
```

m   Masse des Elektrons   rational   xxxE-31 kg

```
m;
```

p(t) Impuls des Elektrons

```
p;
```

p0   Impuls des Elektrons zum Zeitpunkt t = 0   Vektor

```
p0:=Vector([1,0,0]);
```

r(t)   Position des Elektrons zum Zeitpunkt t   Vektor   variabel

```
r;
```

v(t)   Geschwindigkeit des Elektrons

```
v;
```

a(t)   Beschleunigung des Elektrons

```
a;
```

r0   Position des Elektrons zum Zeitpunkt t=0

```
r0:=Vector([5,2,-4]);
```

E(t)   Elektrische Feldstärke

```
E;
```

B(t)   Elektromagnetische Induktion

```
B;
```

FE(t)   Elektrische Kraft

```
print("Kraft des elektrischen Feldes = ", FE);
```

FM(t)   Magnetische Kraft

```
print("Kraft des Magnetfeldes = ", FM);
```

$$1$$

$$1$$

$$p$$

$$p0 := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$r$$

$$p$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$r0 := \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$E$$

$$B$$

$$\text{"Kraft des elektrischen Feldes = "}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{10}t \end{bmatrix}$$

$$\text{"Kraft des Magnetfeldes = "}, \begin{bmatrix} \mathrm{py}(t) \\ -\mathrm{px}(t) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Aussagen

Nun werden die Bedingungen, welche das System dirigieren, zunächst in Worten als einfache Aussagen und dann streng formal beschrieben.
Hier sollen folgende konkrete Aussagen gelten:

Aussage1: Die Summe aller angreifenden Kräfte ist FE+FM und ergibt p_punkt(t)
Aussage2: Das Elektron hat zum Zeitpunkt t=0 den Impuls p0
Aussage3: Das Elektron ist zum Zeitpunkt t=0 im Punkt P0(r0)

Die formale Beschreibung des Aussagensysgtems ergibt in der Regel ein System von Gleichungen bzw. Differentialgleichungen. Dieses System versucht man dann mit einem CAS zu lösen.

```
> DGLset:={}:Aset:={}:
for i from 1 to 3 do
   aussage1[i]:=diff(p(t)[i],t)=FE[i]+FM[i];
```

```
   aussage2[i]:=p(0)[i]=p0[i];
   DGLset:= DGLset union {aussage1[i]} union {aussage2[i]}:
end do:
DGLset;
```

$$\{\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{pz}(t) = -\frac{1}{10}t,\ \mathrm{pz}(0) = 0,\ \frac{\partial}{\partial t}\mathrm{px}(t) = \mathrm{py}(t),\ \mathrm{px}(0) = 1,\ \frac{\partial}{\partial t}\mathrm{py}(t) = -\mathrm{px}(t),\ \mathrm{py}(0) = 0\}$$

Lösung

```
> LoesDGL:=dsolve(DGLset,{px(t),py(t),pz(t)});
```

$$LoesDGL := \{\mathrm{py}(t) = -\sin(t),\ \mathrm{pz}(t) = -\frac{1}{20}t^2,\ \mathrm{px}(t) = \cos(t)\}$$

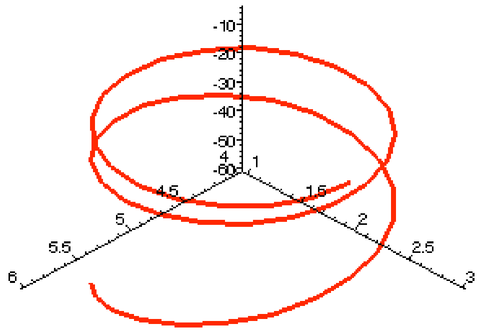
```
> assign(LoesDGL):
```

```
> print("v(t) = ",v(t));
for i from 1 to 3 do
   r(t)[i]:= int(v(t)[i],t)+r0[i];
end do:
print("r(t) = ",Vector([r(t)[1],r(t)[2],r(t)[3]]));
```

$$\text{"v(t) = "}, \begin{bmatrix} \cos(t) \\ -\sin(t) \\ -\frac{1}{20}t^2 \end{bmatrix}$$

$$\text{"r(t) = "}, \begin{bmatrix} \sin(t) + 5 \\ \cos(t) + 2 \\ -\frac{1}{60}t^3 - 4 \end{bmatrix}$$

```
> with(plots):
spacecurve([r(t)[1],r(t)[2],r(t)[3]],t=0..15,axes=NORMAL,thick
ness=3,color=RED);
```




```
>
```